Estudo de isometrias com o GeoGebra como abordagem possível para o 1º e 2º ciclo do Ensino Básico no contexto do reajustamento do programa.

Dinamizadores:
Alexandre Emanuel Batista Trocado
José Manuel Dos Santos Dos Santos

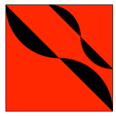
Introdução

O Reajustamento do Programa do Ensino Básico, homologado a 28 de Dezembro de 2007, reforça que no 2º ciclo "o estudo da Geometria deve ter como base tarefas que proporcionem oportunidades para observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas e de operar com elas."(p.36) A nível dos conteúdos o mesmo reajustamento reforça o estudo das isometrias, sugerindo que desde o 1º ciclo no 3º e 4º ano se explorarem "frisos identificando simetrias, de translação, reflexão, reflexão deslizante e rotação (meia-volta)" (p.22). Pretende este ajustamento que no 2º ciclo os alunos identifiquem construam e compreendam as isometrias trabalhando as noções e propriedades relacionadas com a reflexão a rotação e a translação assim como nos padrões finitos do plano se identifiquem simetrias axiais e rotacionais. (p.38). Deixa-se para o 3º Ciclo o estudo dos vectores. Neste sentido durante esta sessão pratica serão desenvolvidas tarefas que envolvem as isometrias do plano com auxilio do GeoGebra ferramenta interessante para o trabalho do professor e dos alunos.

Os padrões do plano no quotidiano

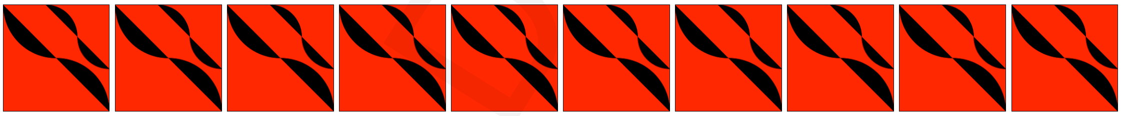
Partamos dos azulejos para alguns conceitos da geometria das transformações a trabalhar.

Os azulejos são uma aplicação visível dos padrões do plano no quotidiano. Estes foram introduzidos na península ibérica pelos povos muçulmanos do norte de África. A palavra azulejo deriva da palavra árabe que significa pequena pedra, de alguma forma.



Na azulejaria partimos de um azulejo ou **módulo:**

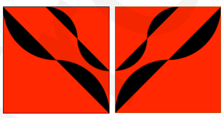
Justapondo vários azulejos em linha, na horizontal, podemos obter um **friso**



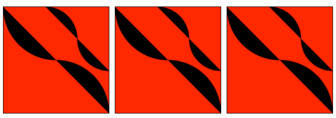
Se ao friso anterior acrescentássemos várias linhas teríamos um **padrão plano**

Considerando padrões monocromáticos do plano ao todo existem dezassete possibilidades. A classificação dos padrões regulares do plano e do espaço foi realizada por Fedorov em 1891 na Rússia quando este desenvolvia estudos de Cristalografia. E. S. Fedorov, estabeleceu a primeira prova rigorosa da existência de grupos de simetria dos cristais no espaço tridimensional, num total de duzentos e trinta. E a partir dos grupos de simetria no espaço, Fedorov demonstrou a existência de dezassete grupos de simetria periódicos no plano. Este resultado foi redescoberto por Fricke e Klein em 1897, e posteriormente por Polya e Niggli em 1924. Um estudo mais completo sobre este assunto pode ser encontrado no capítulo XI da obra Transformation Geometry: an Introduction to Symmetry de George Martin.

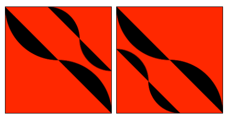
A obtenção de diferentes padrões a partir do modulo é possível através da composição de três isometrias: reflexão, translação e rotação.



Reflexão de eixo vertical



Translação de vector horizontal e intensidade igal a dimensão do azulejo.



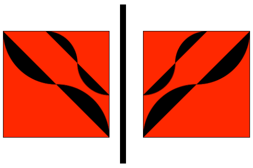
Rotação de 180º ou meia-volta.

Como construir frisos e rosáceas a partir de um módulo

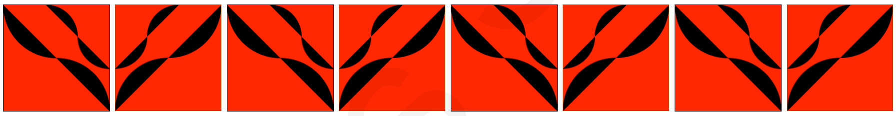
Iremos agora observar o caso dos frisos monocromáticos, uma vez que ao todo são sete. Escolhemos um módulo onde o branco foi substituído por outra cor para melhor leitura.

Se quiséssemos um friso com reflexão vertical precisávamos de duas peças distintas:

a primeira, **o módulo**,  e uma segunda  que pode ser interpretada como sendo a reflexão do módulo, isto é, a peça de azulejo vista ao espelho.

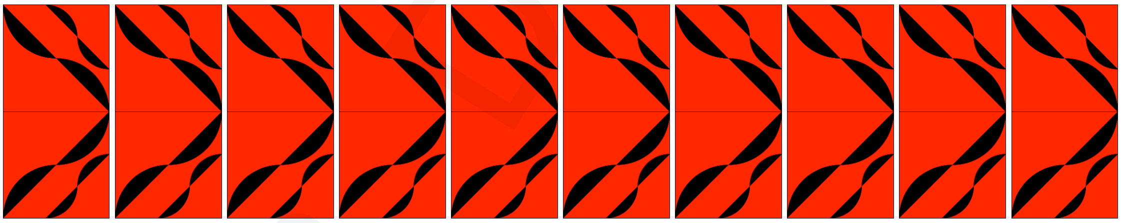


Assim, alternando uma e outra obtínhamos um **friso com reflexão vertical**

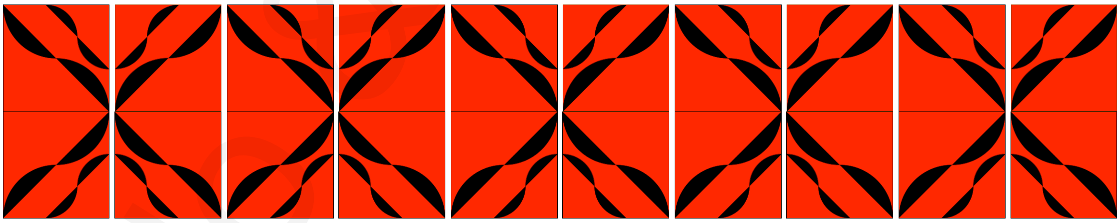


Se tivéssemos uma peça que fosse a reflexão horizontal do módulo:

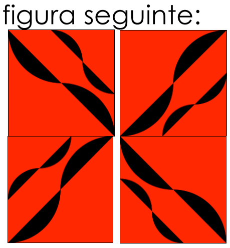
Poderiamos obter um friso com reflexão horizontal:



Se combinassemos uma reflexão horizontal e vertical o friso seria:

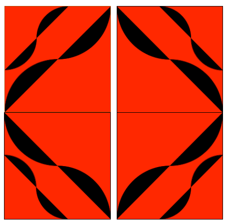


Rodando o módulo em torno de um dos vértices do azulejo poderíamos compor algo semelhante a figura seguinte:



Observe-se que este padrão se mantêm igual se rodarmos o ***módulo ou pétala***, **90º**, **180º**, **270º** e **360º**. O padrão acima não admite reflexões, deste modo o padrão mantém-se invariante apenas por quatro rotações que constituem o grupo cíclico de ordem 4 designado por C_4. Também podemos dizer que é uma rosácea de ordem quatro.

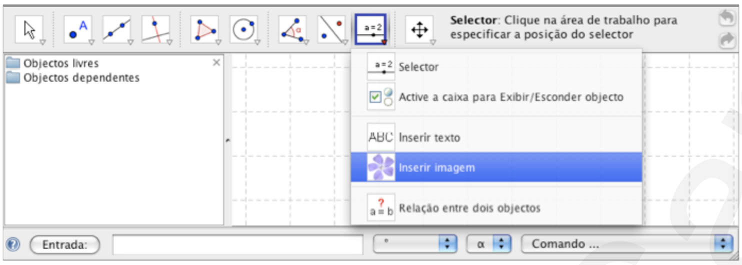
Por outro lado, se observarmos o seguinte padrão:



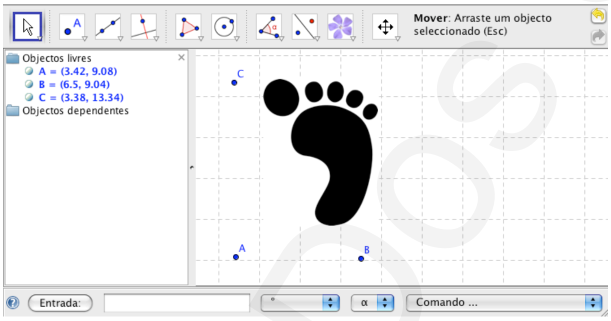
O padrão anterior admite duas reflexões, uma vertical e outra horizontal e é invariante por uma rotação de ***180º*** e ***360º***. Diz-se que padrão tem ***simetria por rotação***, de ordem **2**, e admite ***simetria por reflexão***.

Como construir um friso usando as ferramentas, ou modos, do GeoGebra.

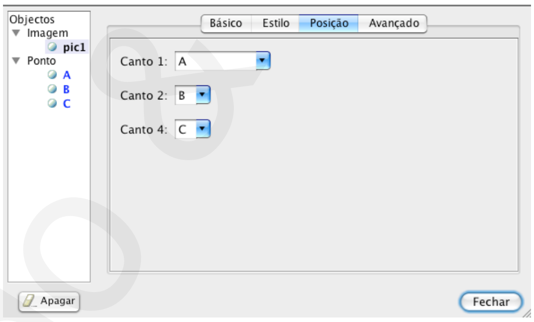
1. Abra o programa GeoGebra.



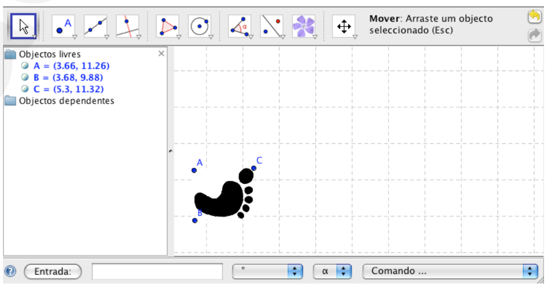
2. Insira a imagem ***pé.png***.
3. Recorrendo à ferramenta de criação de pontos, construa três pontos de forma análoga à da figura seguinte.



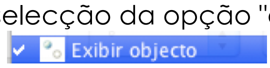
4. Escolha a seta como ferramenta e faça duplo clique na imagem introduzida.
5. Na propriedade "**Posição**" indique os cantos 1, 2 e 3 da imagem, como sendo os pontos A, B e C, respectivamente



6. Altere a imagem recorrendo aos pontos A, B e C de forma análoga à da apresentada na figura seguinte.



7. Com o botão direito do rato, retire a selecção da opção "**exibir objecto**" para cada um dos pontos.

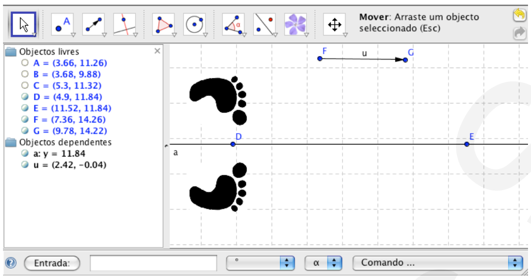


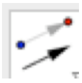
8. Guarde o ficheiro com o nome **isometrias.ggb**

9. Recorra à ferramenta  para definir dois pontos e uma recta que passe por eles.

10. Em seguida recorra à ferramenta . Para reflectir a imagem na recta, deve clicar na imagem e na recta que pretende usar como eixo de simetria.

11. Recorra à ferramenta  para, a partir de dois pontos, definir um vector. Obtenha uma representação semelhante à da figura seguinte:



12. Recorra à ferramenta  para fazer a translação das imagens segundo o vector definido no ponto anterior. Clique nas imagens e no vector.

13. Altere a posição dos pontos que definem o vector e a recta par visualizar as modificações no friso.

14. Guarde o ficheiro com o nome ***p1m1.ggb***.

15. Abra o ficheiro guardado anteriormente ***isometrias.ggb***.

16. Construa um ponto **D** junto à imagem.

17. Use a ferramenta  para seleccionar o objecto e o centro da rotação. Em seguida, introduza o valor 180º como ângulo de rotação, no sentido anti-horário.

18. Em seguida defina um vector, a partir de dois pontos e faça a translação das imagens anteriores.

19. Altere a posição do ponto **D** e dos pontos que definem o vector para visualizar as modificações no friso.

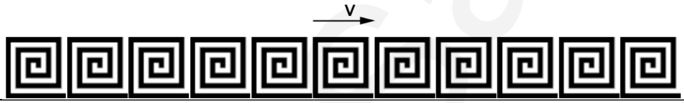
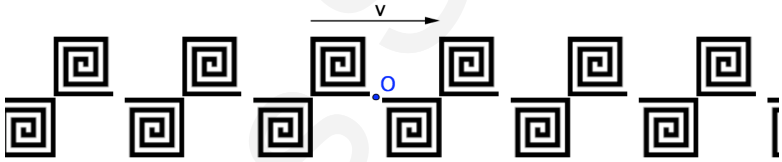
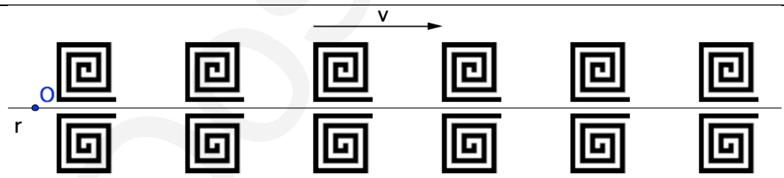
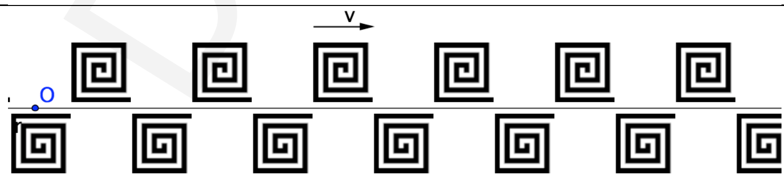
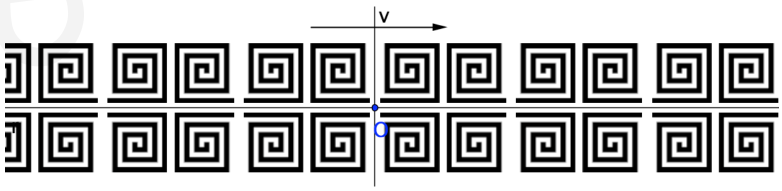
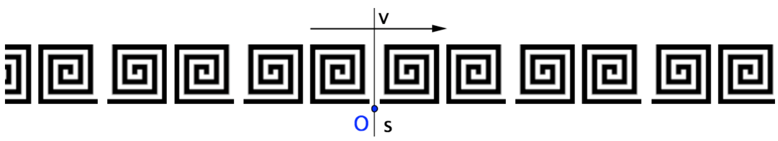
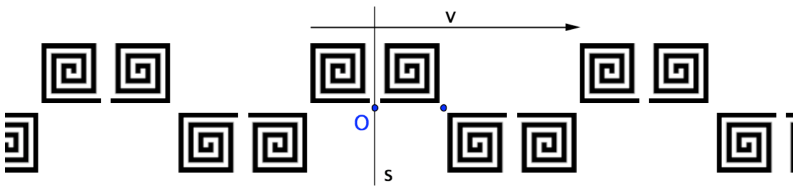
Guarde o ficheiro com o nome p112.ggb

Como realizar frisos no GeoGebra, usando a linha de comandos.

As ferramentas, ou modos, que atrás foram usados podem traduzir-se em instruções que podem ser dadas nas linhas de comandos:

Marcar um ponto ***A***.	**A=(0,0)**
Marcar um vector dados dois pontos, ***A*** e ***B***.	**v=vector[A,B]**
Reflexão relativa a uma recta ***r***.	**C=reflexão[A,r]**
Reflexão relativa a um ponto ***P***.	**D=reflexão[A,P]**

A partir do Motivo  **in *greca.ggb***

p111 – Invariante por translação Sequência[Translação[Greca, i v], i, -5, 5]	
p112 – Invariante por meia-volta e translação GrecaRO=Reflexão[Greca,O] Sequência[Translação[Greca, i v], i, -5, 5] Sequência[Translação[GrecaRO,i v], i, -5, 5]	
p1m1 – Invariante por reflexão paralela a direcção da translação r=Recta[O, v] GrecaRr=reflexão[Greca,r] Sequência[Translação[Greca,i v], i, -5, 5] Sequência[Translação[GrecaRr,i v], i, -5, 5]	
p1a1 – invariante por translação e reflexão deslizante r=Recta[O, v] GrecaRrv=Translação[reflexão[Greca,r],v] Sequência[Translação[Greca, 2 i v], i, -5, 5] Sequência[Translação[GrecaRrv, 2 i v], i, -5, 5]	
pmm2 – Invariante por reflexão paralela e perpendicular a direcção da translação r=Recta[O, v] s=Perpendicular[O, v] GrecaRr=reflexão[Greca,r] GrecaRv=reflexão[Greca,s] GrecaRrRv=reflexão[GrecaRv,r] { Sequência[Translação[Greca,i v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaRr,i v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaRv,i v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaRrRV,i v], i, -5, 5]}	
pm11 – Invariante por reflexão perpendicular a direcção da translação s=Perpendicular[O, v] GrecaRv=reflexão[Greca,s] { Sequência[Translação[Greca,i v], i, -5, 5], Sequência[Translação[GrecaRv,i v], i, -5, 5]}	
pma1 – Invariante por meia-volta e reflexão perpendicular a direcção da translação s=Perpendicular[O, v] GrecaRv=reflexão[Greca,s] GrecaMv= reflexão[Greca,P] GrecaMvRv= reflexão[GrecaRv,P] { Sequência[Translação[Greca,i v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaRv, i v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaMv, i v], i, -5, 5],Sequência[Translação[GrecaMvRv,i v], i, -5, 5]}	

Observe cada um dos frisos seguintes:

a)  ;

b)  ;

c)  ;

d)  ;

e)  .

e preencha a seguinte tabela:

Friso	Tem meia–volta?	Tem reflexão deslizante?	Tem reflexão numa recta?
a)			
b)			
c)			
d)			
e)			

Alexandre Emanuel Batista Trocado- INED – Instituto de Educação e Desenvolvimento
José Manuel Dos Santos Dos Santos - ES Afonso Sanches – ESE/IPP

Como construir uma rosácea usando as ferramentas, ou modos, comandos e a janela de álgebra do GeoGebra.

Rosáceas com simetria de reflexão

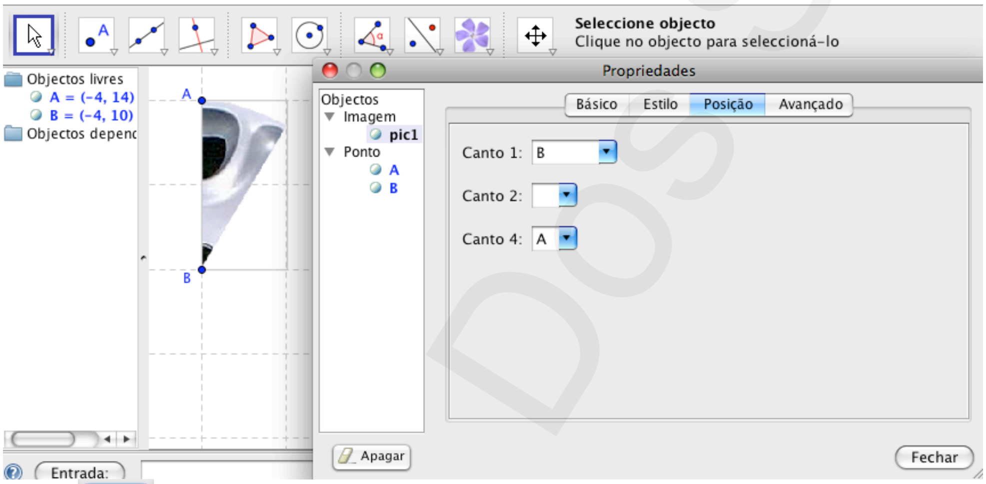
1.Abra o GeoGebra.

2.Insira a imagem **c6_p.gif**.

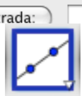
3.Insira dois pontos A e B.

4.Analogamente ao que foi feito na actividade anterior: Escolha a seta como ferramenta e faça duplo clique na imagem introduzida.

5.Na propriedade "**Posição**" indique os cantos 1 e 4 da imagem, como sendo os pontos B e A, respectivamente.



6.

7.Com a ferramenta  trace a recta AB.

8.Recorra à ferramenta  para fazer uma rotação de **30º no sentido horário** do ponto **A** em torno de **B**, obtendo assim o ponto **A'.**

9.Construa a recta **BA'**

10.Use a ferramenta  para fazer a reflexão da imagem (**pic1**), tendo como eixo a recta **BA'**.

11.Repita os dois passos anteriores até concluir o motivo.

Questões para reflexão:

O padrão obtido poderá ser obtido apenas por rotação do módulo  **?**

Se pretender obter o padrão com apenas uma reflexão e rotações como devo proceder?

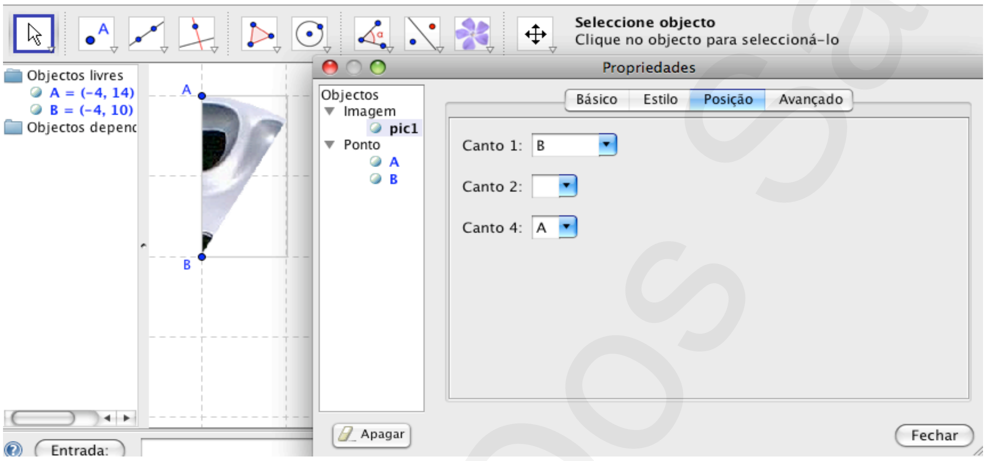
1.Abra o GeoGebra.

2. Insira a imagem **c6_p.gif** .

3. Insira dois pontos A e B.

4.Analogamente ao que foi feito na actividade anterior: Escolha a seta como ferramenta e faça duplo clique na imagem introduzida.

5.Na propriedade "**Posição**" indique os cantos 1 e 4 da imagem, como sendo os pontos B e A, respectivamente.



6. Com a ferramenta  trace a recta AB.

7. Use a ferramenta  para fazer a reflexão da imagem (**pic1**), tendo como eixo a recta AB.

8. Altere o nome da imagem reflectida para **pic2.**

9. Introduza na barra de entrada o comando **α=ângulo[60°]**.

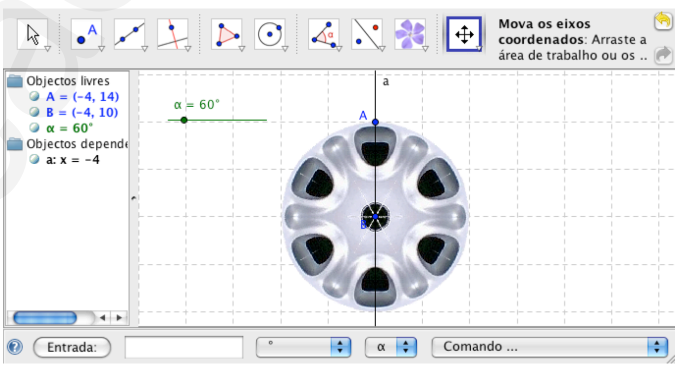
10. Repare que na janela de álgebra passou a estar definido o ângulo α = 60°

11. Clique com o botão direito do rato sobre o ângulo definido e escolha a opção exibir objecto.

12. Introduza em seguida na barra de entrada o comando

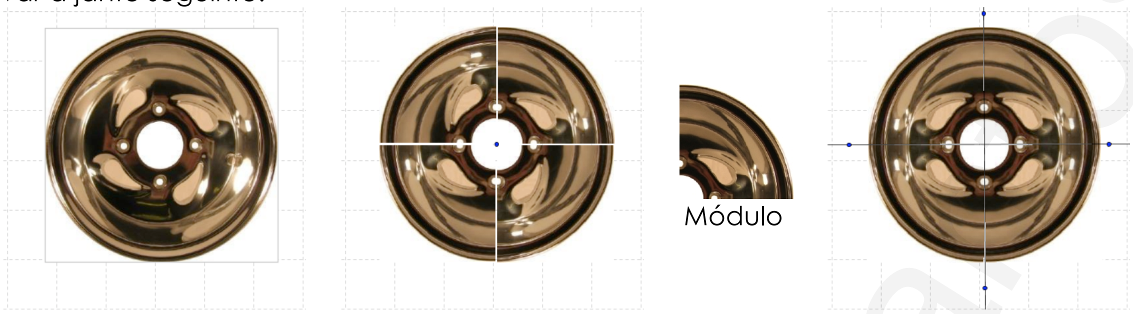
pic3=rotação[pic1,α,B]

13.Proceda de forma análogo às anteriores para construir a totalidade da jante.



Simetrias de Reflexão e de Rotação numa rosácea.

Ao observar a jante seguinte:



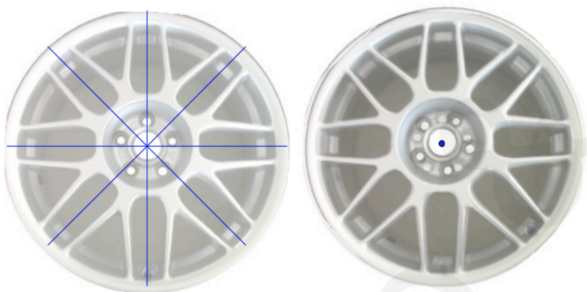
c4.ggb

Verificamos que o padrão dos orifícios dos parafusos tem simetria de rotação para múltiplos de 90º. Toda a jante é invariante por rotação, a amplitude desta será múltipla de 90º, ou seja, 90º, 180º, 270º e 360º. Toda a jante pode ser obtida por rotação do módulo mas não tem simetria de reflexão. O padrão esta associado a uma rosácea de ordem 4, C_4.

Neste outro padrão será do tipo C_8 ou C_5?

Padrão dos orifícios dos parafusos tem simetria de rotação para múltiplos de 72º. ($72=2^3x3^2$).

Observe-se que rodando uma imagem transparente sobre o centro da jante de um ângulo de 72º os orifícios para os parafusos da jante coincidem mas os raios não.



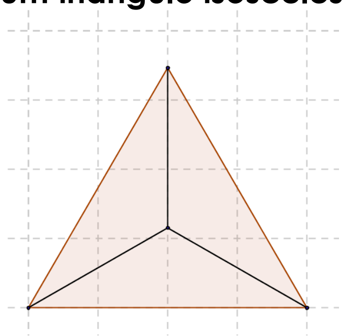
Padrão dos raios da jante tem simetria de auto-reflexão, ao longo de oito eixos. Têm ainda simetria de rotação para múltiplos de 45º.($45=3^2x5$)

Ao rodar a imagem transparente de um ângulo de 45º os raios coincidem mas não coincidem os orifícios.

Se toda a jante for invariante por rotação, a amplitude desta será múltipla de 72º e 45º. Como o mínimo múltiplo comum de 72º e 45º é 360º concluímos que a jante só é invariante por rotações de 360º, ou seja pela identidade.

c1.ggb

Quais as isometrias que levam um triângulo isósceles gerar um triângulo equilátero?

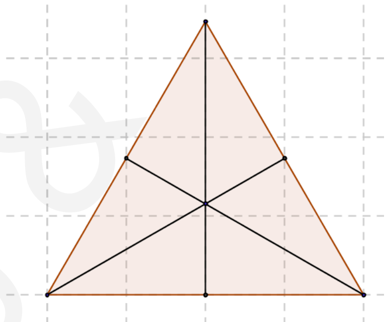


1. Construa um triângulo isósceles.
   1.1. Construa um lado do triângulo e obtenha o outro lado de igual comprimento por rotação do primeiro de 120º.

   1.2. Construa, recorrendo à ferramenta de polígono , o triângulo isósceles.

2. Introduza na barra de entrada o comando **α=ângulo[120º].**
3. Clique com o botão direito do rato sobre o ângulo definido na janela de álgebra e seleccione "Exibir Objecto".
4. Faça uma rotação do triângulo isósceles e determine o ângulo que permite gerar o triângulo equilátero?

Quais as isometrias que permitem um triângulo escaleno, gerar um triângulo equilátero?



3. Recorra às ferramentas utilizadas anteriormente e gere um triângulo equilátero, a partir de um triângulo escaleno.

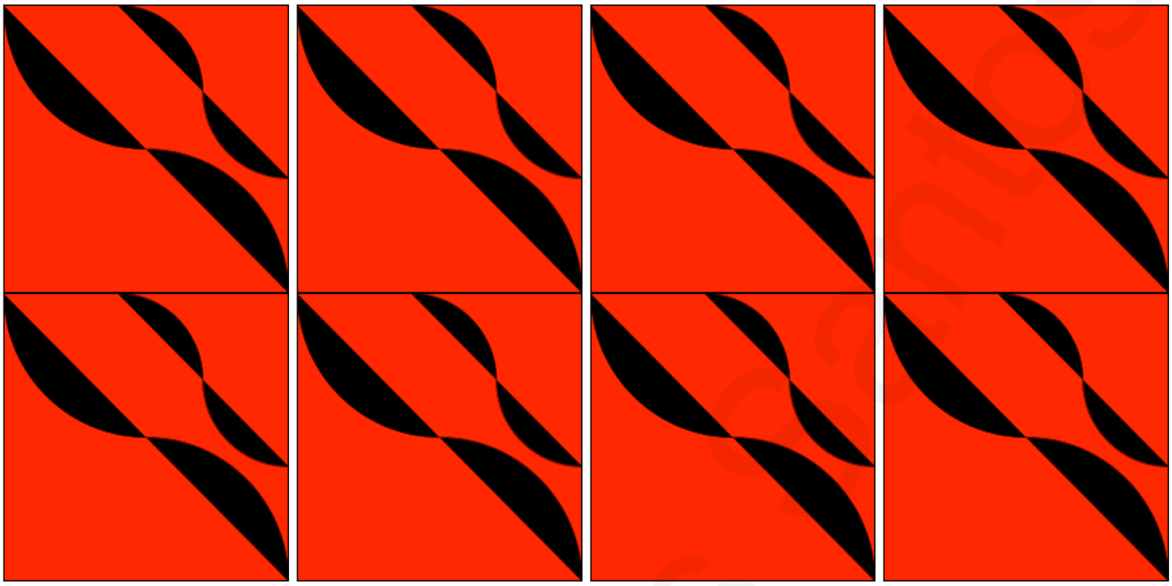
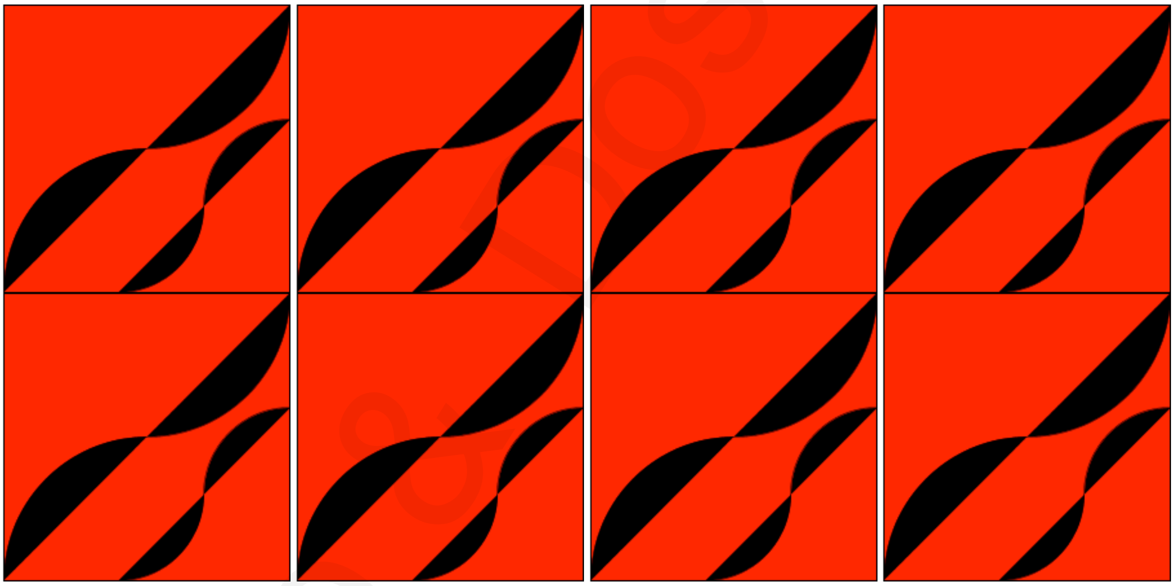
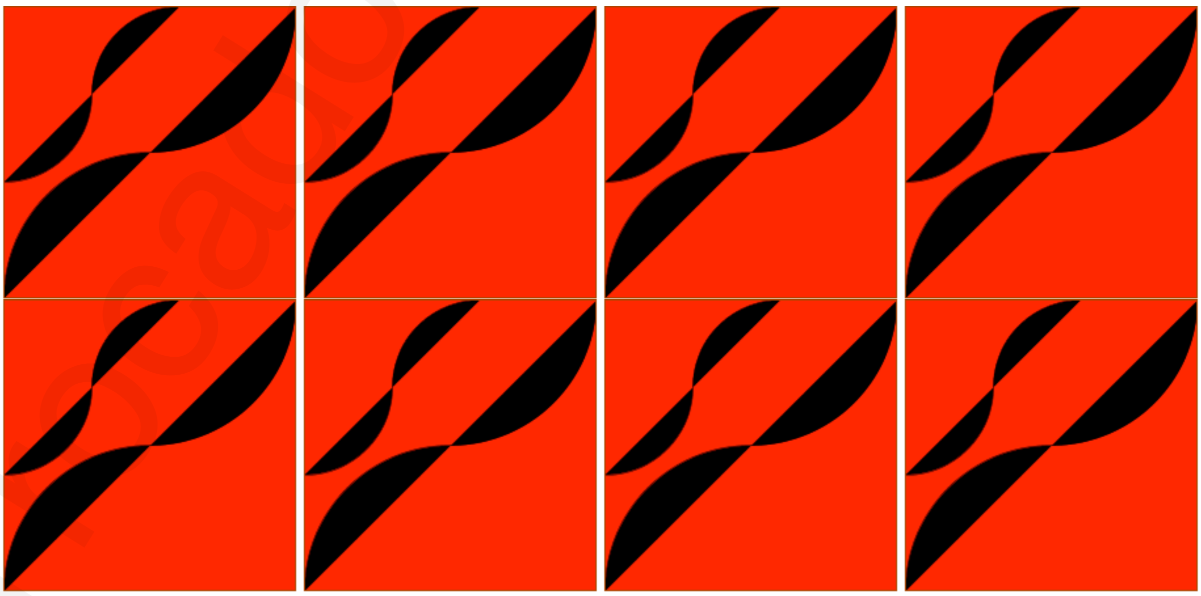
No primeiro caso verificamos que :

a) um triangulo equilátero pode ser gerado como rosácea de ordem três onde a pétala é um triângulo isósceles cujos lados congruentes definem no ponto comum um ângulo de 120º

b) um triângulo equilátero pode ser gerado por reflexão em três eixos concorrentes formando ângulos de 120º, dois a dois, de um triângulo escaleno cujos ângulos internos medem 30º, 60º e 90º.

Este trabalho pode ser generalizado a todos os polígonos irregulares.

Materiais para trabalho manipulativo

Motivo	
Reflexão horizontal	
Reflexão vertical	

Bibliografia

Ponte, J. et al. (2007) Reajustamento do Programa do Ensino Básico. Versão Homologada. Lisboa: DGIDC.
Bellingeri, P., Dedò, M., Sieno, S. & Turín, C. (2003). O ritmo das formas. Associação Atractor.
Cederberg, J. (1989). A Course in Modern Geometries. New York: Springer-Verlag.
H.S.M. Coxeter, J. Moser (1980). Generators and Relations for Discrete Groups. New York: Springer-Verlag.
Kinsey, C. Moore, T. (2002). Symmetry, Shape, and Space. Emeryville: Key College Publishing.
Martin, G.E. (1982a). The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane. New York: Springer-Verlag.
Martin, G.E. (1982b). Transformation Geometry: an Introduction to Symmetry. New York: Springer-Verlag.
Veloso, E. (1998). Geometria. Temas Actuais. Materiais para professores. Lisboa: IIE
Washburn, Dorothy K.; Crowe, Donald W.(1998) Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis. Seattle: University of Washington Press,